Leçon 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Développements :

Théorème central limite, Limite de variables aléatoires gaussiennes.

Bibliographie :

Bernis, Ouvrard, Barbe Ledoux, Candelpergher.

Rapport du jury :

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Les très bons candidats auront en tête le théorème de Radon-Nikodym, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité. (2017 : Certains candidats trouveront utile de mentionner le théorème de Radon-Nikodym, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité.) Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités est trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles. Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$. Les candidats proposent parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypothèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pourra pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de Scheffé sur la convergence en loi peut aussi faire l'objet d'un développement. La loi de Cauchy offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée). Pour aller plus loin, les candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de Cochran.

Remarque 1. *Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* R^d *pour un* $d \geq 1$.

1 Variables aléatoires à densité

Définition 2 (Ouvrard 1 p184)**.** *[Candel p107] Variable aléatoire à densité.*

Remarque 3 (Ouvrard p184)**.** *La densité détermine entièrement la loi de* X*.* f_X *est unique modulo égalité pp.*

Proposition 4 (Ouvrard 1 p185)**.** *Si* X *est à densité,* $P(X = x) = 0$.

Définition 5 (Ouvrard 1 p184)**.** *Fonction de répartition.*

Proposition 6 (Ouvrard 1 p185)**.** *Propriétés de la fonction de répartition, particularité lorsque la va est à densité.*

Remarque 7 (Candel p78)**.** *Réciproquement, si* F *est continue et* C^1 *par morceaux, alors* X *admet une densité donnée par* $f = F'$.

Proposition 8 (Ouvrard 2 p8)**.** *Pour* $d = 1$*,* X *est à densité si et seulement si il existe* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tq* $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Proposition 9 (Ouvrard)**.** X *a pour densité* f *si et seulement si pour toute fonction* h *continue bornée,* $E[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x)dx$.

Exemple 10 (Ouvrard)**.**

1.1 Espérance, variance et moments

Définition 11 (Ouvrard 1 p190)**.** *Définition de l'espérance.*

Théorème 12 (Ouvrard 1 p191)**.** *[Barbe p56] Formule de transfert.*

Corollaire 13. *En particulier,* X *a un moment d'ordre* p *si et seulement si* $\int |t|^p f(t)dt < +\infty$*, et alors* $E[X^p] = \int x^p f(x)dx$.

Définition 14 (Ouvrard 1 p193)**.** *[Barbe p60] Variance.*

Contre exemple 15. *Loi de Cauchy.*

Contre exemple 16 (Barbe)**.** *Même lorsqu'elle est définie, la suite des moments ne caractérise pas la densité d'une variable aléatoire. Par exemple, on pose pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $f(x) = 1/(2\pi x)e^{-ln(x)^2/2}1_{x>0}$*, et pour* $a \in [-1, 1], f_a(x) = f(x)(1 + a\sin(2\pi ln(x)))$*. Alors* f*,* f_a *sont des densités, et si* X, X_a *ont pour densité respectivement* f*,* f_a*, elles ont les mêmes moments.*

Proposition 17. *Fonction caractéristique (cf Scornet). C'est la transformée de Fourier de la densité.*

Proposition 18. *La fonction caractéristique caractérise la loi de* X*. De plus, si* X *admet un moment d'ordre* p*, alors* ϕ_X *est* p *fois dérivable et* $\phi^(p)_X(t) = \int x^p f(x)e^{itx}dx$.

Proposition 19. *Inversion de Fourier.*

1.2 Exemples de lois usuelles

Définition 20 (Ouvrard 2 p28)**.** *Pour $a < b \in \mathbb{R}$, on dit que X suit une loi uniforme sur $[a,b]$, et on notée $U([a,b])$, si elle admet pour densité ...*

Application 21 (Ouvrard 2 p29)**.** *Simulation des lois.*

Proposition 22 (Ouvrard 2 p28)**.** *Espérance, variance, fonction caractéristique.*

Définition 23. *Loi normale.*

Proposition 24. *Espérance, variance, fonction caractéristique.*

Exemple 25. *Cela permet par exemple de modéliser la répartition des notes d'une classe autour de la moyenne m.*

Définition 26. *Loi exponentielle.*

Proposition 27. *Espérance, variance, fonction caractéristique.*

Exemple 28. *Cela permet de modéliser la durée de vie d'un objet/d'une molécule radioactive grâce à la propriété : $\mathbb{P}(X > t+s | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ qui caractérise la loi exponentielle.*

Définition 29 (Ouvrard 2 p28)**.** *Loi gamma.*

Proposition 30.

Définition 31. *Loi du chi-2.*

Remarque 32. *$\chi_2(n)$ a la même loi qu'une somme de n gaussiennes centrées réduites $\chi(0,1)$. De plus,$E(\lambda)$ suit la loi $\Gamma(1,\lambda)$.*

2 Calcul pratique des densités

2.1 Lois marginales

Proposition 33 (Ouvrard 2 p12)**.** *[Ouvrard 1 p189] Densité de $T(X)$ en fonction de celle de X.*

Exemple 34 (Ouvrard 2 p10)**.** *Si U suit une loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}^2$, loi de $g(U)$ où $g(a,b) = a/b$.*

Définition 35 (Ouvrard 2 p12)**.** *Lois marginales.*

Proposition 36 (Ouvrard 2 p12)**.** *[Ouvrard 1 p188] Densité de X_1 en fonction de f_{X_1,X_2}.*

Exemple 37 (Ouvrard 1 p188)**.** *[Ouvrard 2 p13]*

2.2 Indépendance

Proposition 38 (Ouvrard 2 p43)**.** *[Candel p159] Critère d'indépendance dans le cas à densité.*

Application 39 (Ouvrard 2 p67)**.** *[Candel p160] S suit la loi exponentielle $1/2$, θ la loi uniforme $[0,2\pi]$, loi de $(\sqrt{S}\cos(\theta), \sqrt{S}\sin(\theta))$.*

Proposition 40 (Ouvrard 2 p63)**.** *Densité de la somme de deux va indépendantes à densité est le produit de convolution de leur densité.*

Application 41 (Ouvrard 2 p64)**.** *Lois gamma.*

Remarque 42. *Ajouter ce que ça signifie pour les sommes de variables exponentielles.*

Proposition 43 (Ouvrard 2 p207)**.** *Si X et Y sont indépendantes alors $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.*

Application 44. *Somme de lois normales indépendantes.*

Exemple 45 (Ouvrard p206)**.** *Pour X_1, X_2 iid de fonction caractéristique $\phi(t) = 1/(1+t)^2$(Loi de Laplace), on pose $Y_1 := X_1 - X_2$ et $Y_2 = X_1 + X_2$. Alors Y_1 et Y_2 ont même fonction caractéristique, mais ne sont pas indépendantes.*

3 Variables aléatoires gaussiennes

3.1 Définitions et quelques propriétés

Définition 46 (Barbe p104)**.** *Variable aléatoire gaussienne. Espérance et variance.*

Proposition 47 (Barbe p104)**.** *Un vecteur gaussien est entièrement caractérisé par son espérance et sa matrice de covariance.*

Proposition 48 (Barbe p104)**.** *Fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.*

Proposition 49 (Barbe p105)**.** *Si X est un vecteur gaussien, ses marginales sont des gaussiennes mais réciproque fausse.*

Proposition 50 (Barbe p105)**.** *Si X est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance A^tA alors X a la même loi que AG où G suit une loi normale centrée réduite.*

Proposition 51 (Cadre Vial p182)**.** *Si la matrice de covariance est inversible, expression de la densité de X.*

Proposition 52 (Barbe p107)**.** *Si les composantes de X sont deux à deux non corrélées alors les X_i sont mutuellement indépendants.*

Théorème 53 (Ouvrard p280)**.** *Théorème de Bernstein. Si X et Y sont des va indépendantes telles que $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes alors X et Y sont deux va gaussiennes.*

Proposition 54 (Bernis)**.** *Limite de variables aléatoires gaussiennes.*

4 Applications

4.1 Théorème central limite

Théorème 55. *Théorème de Lévy.*

Théorème 56. *Théorème central limite.*

Application 57 (Bernis)**.** *Moivre-Laplace.*

Application 58 (Bernis)**.** *Application à un intervalle de confiance.*

4.2 Méthode de Monte Carlo

Application 59 (Ouvrard p128)**.** *Méthode de Monte Carlo.*